

Operations Research

Prepared by Dr. Mohamed Eassa

IT 262
Operations Research

Lecture 8



Assignment Problem

Lecture 8

IT 262

Operations Research

Prepared by

Dr. Mohamed Eassa

Lecture 8 Topics

- ❖ Assignment Problem
- ❖ Balanced Assignment Problem
- ❖ Optimal Solution

Assignment Problem

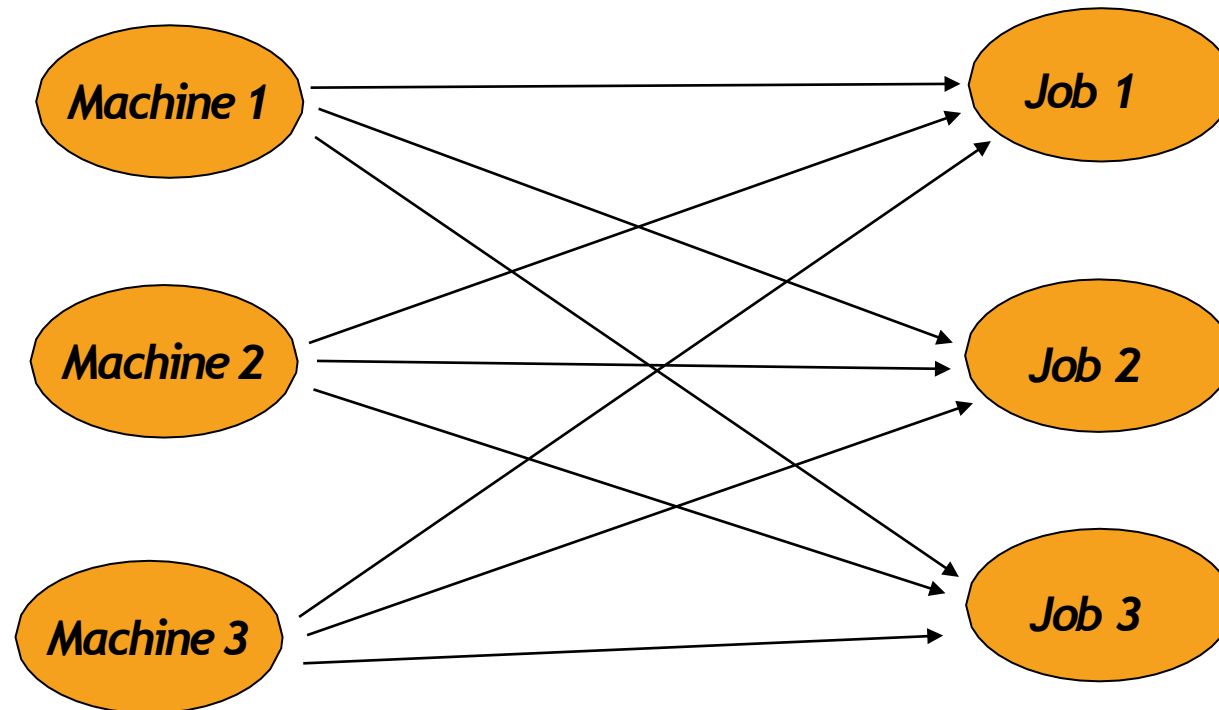
- In many business situations, management needs to assign
 - personnel to jobs
 - jobs to machines
 - machines to job locations
- Consider the situation of assigning n jobs to n machines.
- When a job i ($=1,2,\dots,n$) is assigned to machine j ($=1,2, \dots,n$) that incurs a cost C_{ij} .
- The objective is to assign the jobs to machines at the least possible total cost.

Assignment Problem

- This situation is a special case of the Transportation Model and it is known as the assignment problem.
- Here, jobs represent “sources” and machines represent “destinations”
- The supply available at each source is 1 unit and demand at each destination is 1 unit

Assignment Problem

Special case from transportation problem



Assignment Problem

	Machine					Source
		1	2		n	
Job	1	C11	C12		C1n	1
	2	C21	C22		C2n	1
	.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.
	n	Cn1	Cn2		Cnn	1
Destination		1	1		1	

The assignment model can be expressed mathematically as follows:

$X_{ij} = 0$, if the job j is not assigned to machine i
1, if the job j is assigned to machine i

Assignment Problem

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

(Sum of assignments from a source should be exactly equal to 1):

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \quad \text{For } i=1,2,\dots,n$$

(Sum of assignments to a destination should be equal to the demanded quantity by that destination):

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1 \quad \text{For } j=1,2,\dots,n$$

(Quantities to be assigned can be either 0 or 1):

$$X_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad \text{For all } i \text{ and } j.$$

Assignment Problem

Example

A factory has four different machines (Machine-1, Machine-2, Machine-3, Machine-4) to perform four basic factory tasks (Job-1, Job-2, Job-3, Job-4). To perform any task on any machine, the factory management needs time to prepare and equip the machine to carry out the task which is called setup time. Each machine has a different setup time according to the following schedule. If you know that it is not possible to prepare the machine for more than one task only, what is the optimal policy for carrying out the tasks with the shortest possible preparation time?

Assignment Problem

	Job-1	Job-2	Job-3	Job-4
Machine-1	14	5	8	7
Machine-2	2	12	6	5
Machine-3	7	8	3	9
Machine-4	2	4	6	10

Assignment Problem

c_{ij} = cost of assigning Job- i to Machine- j
 $i = 1, 2, 3, 4$ and $j = 1, 2, 3, 4$

Balanced Assignment Problem

Min

$$\begin{aligned}
 Z = & 14 x_{11} + 5 x_{12} + 8 x_{13} + 7 x_{14} + \\
 & 2 x_{21} + 12 x_{22} + 6 x_{23} + 5 x_{24} + \\
 & 7 x_{31} + 8 x_{32} + 3 x_{33} + 9 x_{34} + \\
 & 2 x_{41} + 4 x_{42} + 6 x_{43} + 10 x_{44}
 \end{aligned}$$

Assignment Problem

Constraints:

Each task is assigned to only one machine

Sum of machines that assigned to one task = 1

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$$

Assignment Problem

Constraints:

Each machine is assigned only one task

That is, the sum of the tasks performed by any machine= 1

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$$

Assignment Problem

The Hungarian Method

- It is algorithm to solve assignment problem.
 - Balanced assignment problem: no. of tasks = no. of machines.
 - Depend on the cost matrix only.
 - Apply on assignment problem from type : Min Z.

Assignment Problem

The Hungarian Method

Let the cost matrix for assignment as follows

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	$\rightarrow p_1$
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	$\rightarrow p_2$
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	$\rightarrow p_3$
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	$\rightarrow p_4$

Step 1: For each row k determine the smallest element, let it be p_k

خطوة 1: لكل صف k نحدد أصغر عنصر وهو p_k

$$p_k = \min \{c_{kj} : j = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Assignment Problem

The Hungarian Method

خطوه ٢: لكل صف k اطرح العنصر الأصغر p_k من كل عنصر في الصف لتنتج المصفوفة الجديدة.

$c_{11} - p_1$	$c_{12} - p_1$	$c_{13} - p_1$	$c_{14} - p_1$
$c_{21} - p_2$	$c_{22} - p_2$	$c_{23} - p_2$	$c_{24} - p_2$
$c_{31} - p_3$	$c_{32} - p_3$	$c_{33} - p_3$	$c_{34} - p_3$
$c_{41} - p_4$	$c_{42} - p_4$	$c_{43} - p_4$	$c_{44} - p_4$

Assignment Problem

The Hungarian Method

خطوه ٢ : لتكن المصفوفة الناتجة

d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}
↓	↓	↓	↓
q_1	q_2	q_3	q_4

خطوه ٣ : لكل عمود k حدد العنصر الأصغر وليكن q_k

$$q_k = \min \{d_{ik} : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Assignment Problem

The Hungarian Method

خطوه ٤: لكل عمود k ا طرح العنصر الأصغر q_k من كل عنصر في العمود لتنتج المصفوفة الجديدة

$d_{11} - q_1$	$d_{12} - q_2$	$d_{13} - q_3$	$d_{14} - q_4$
$d_{21} - q_1$	$d_{22} - q_2$	$d_{23} - q_3$	$d_{24} - q_4$
$d_{31} - q_1$	$d_{32} - q_2$	$d_{33} - q_3$	$d_{34} - q_4$
$d_{41} - q_1$	$d_{42} - q_2$	$d_{43} - q_3$	$d_{44} - q_4$

Assignment Problem

The Hungarian Method

خطوه ٥: اوجد اقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية او العمودية لتغطيه جميع الأصفار في المصفوفة.

Step 5: Cover all zeros with a minimum number of lines

خطوه ٦: إذا كن عدد الخطوط الأفقية والعمودية = عدد الصفوف (او الأعمدة) $\longleftrightarrow$ الحل الأمثل (توقف)

Step 6: when number of vertical and horizontal lines = number of rows (or columns) $\rightarrow$ Optimal solution

خطوه ٧: إذا كن عدد الخطوط الأفقية والعمودية $>$ عدد الصفوف (او الأعمدة)

• حدد اقل عنصر من العناصر الغير مغطاة بخط افقي او عمودي وليكن h

$$h = \min \{ d_{ij} - q_j : \text{cell } (i,j) \text{ is not covered} \}$$

• اطرح من جميع العناصر الغير المغطاة العدد h

• اصف القيمة h الى جميع العناصر المغطاة بخطين (خط أفقي وخط عمودي) $\longleftarrow$ نقاط التقاطع

خطوه ٨: انتقل لخطوه ٥

Assignment Problem

The Hungarian Method

تحديد الحل الأمثل

في المصفوفة النهائية

أولاً: ركز على عدد الخلايا الصفيرية المنفردة

١. حدد الخلية الصفيرية المنفردة في الصف i والعمود j (إن وجد) ولتكن خلية (i, j) واجعل $x_{ij}^* = 1$ ثم احذف صف i و عمود j
٢. حدد الخلية الصفيرية المنفردة في الصف فقط (إن وجد) ولتكن خلية (i, j) واجعل $x_{ij}^* = 1$ ثم احذف صف i و عمود j
٣. حدد الخلية الصفيرية المنفردة في العمود فقط (إن وجد) ولتكن خلية (i, j) واجعل $x_{ij}^* = 1$ ثم احذف صف i و عمود j

Assignment Problem

The Hungarian Method

تحديد الحل الأمثل

في المصفوفة النهائية

ثانياً: ركز على عدد الخلايا الصفيرية في الصف

١. اختر الصف ذو اقل خلايا صفيره وليكن صف k واختر الخلية الصفيرية ذات اقل تكلفه في الصف k ولتكن خليه (k,j) واجعل $x_{kj}^* = 1$ ثم احذف صف k و عمود j

٢. اذا تساوت الصفوف في عدد الخلايا الصفيرية طبق الطريقة في (١) على الأعمدة.

Assignment Problem

Problem 1

Problem 1:

A factory has four different machines (Machine-1, Machine-2, Machine-3, Machine-4) to perform four basic factory tasks (Job-1, Job-2, Job-3, Job-4). To perform any task on any machine, the factory management needs time to prepare and equip the machine to carry out the task which is called setup time. Each machine has a different setup time according to the following schedule. If you know that it is not possible to prepare the machine for more than one task only, what is the optimal policy for carrying out the tasks with the shortest possible preparation time?

Assignment Problem

Problem 1

Problem 1:

	Job-1	Job-2	Job-3	Job-4
Machine-1	14	5	8	7
Machine-2	2	12	6	5
Machine-3	7	8	3	9
Machine-4	2	4	6	10

Assignment Problem

Problem 1

حدد العنصر الأصغر في كل صف

14	5	8	7
2	12	6	5
7	8	3	9
2	4	6	10

$$\rightarrow p_1 = 5$$

$$\rightarrow p_2 = 2$$

$$\rightarrow p_3 = 3$$

$$\rightarrow p_4 = 2$$

Assignment Problem

Problem 1

كون المصفوفة الناتجة من طرح كل عنصر في المصفوفة من العنصر الأصغر في كل صف

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8

Assignment Problem

Problem 1

حدد العنصر الأصغر في كل عمود

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8
↓	↓	↓	↓
q_1	q_2	q_3	q_4
0	0	0	2

Assignment Problem

Problem 1

كون المصفوفة الناتجة من طرح كل عنصر في المصفوفة من العنصر الأصغر في كل عمود

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

Assignment Problem

Problem 1

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

Assignment Problem

Problem 1

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

Assignment Problem

Problem 1

تغطيه الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف او الأعمدة

Assignment Problem

Problem 1

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف او الأعمدة

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

اطرح العنصر الأصغر من العناصر الغير مغطاه

اضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاه بخطين (نقاط التقاطع)

Assignment Problem

Problem 1

9+1	0	3	0
0	10-1	4-1	1-1
4+1	5	0	4
0	2 - 1	4 - 1	6 - 1

اطرح العنصر الأصغر من العناصر الغير مغطاه

اضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاه بخطين (نقاط التقاطع)

Assignment Problem

Problem 1

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Assignment Problem

Problem 1

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Assignment Problem

Problem 1

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Assignment Problem

Problem 1

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Assignment Problem

Problem 1

تغطيه الخلايا الصفريه بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

عدد الخطوط = من عدد الصفوف او الأعمدة

الحل الأمثل

Assignment Problem

Problem 1

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Assignment Problem

Problem 1

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

$$x_{33}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 1

10	0		0
0	9		0
0	1		5

$$x_{33}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 1

10	0		0
0	9		0
0	1		5

$$x_{33}^* = 1 \quad x_{41}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 1

		0			0
		9			0

$$x_{33}^* = 1 \quad x_{41}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 1

		0			0
		9			0

$$x_{33}^* = 1 \quad x_{41}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 1

		0			

$$x_{33}^* = 1 \quad x_{41}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1 \quad x_{12}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 1

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

$$x_{33}^* = 1 \quad x_{41}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1 \quad x_{12}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 1

	Job-1	Job-2	Job-3	Job-4
Machine-1	14	5	8	7
Machine-2	2	12	6	5
Machine-3	7	8	3	9
Machine-4	2	4	6	10

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

$$x_{33}^* = 1$$

$$x_{41}^* = 1$$

$$x_{24}^* = 1$$

$$x_{12}^* = 1$$

Machine-1 is assigned to Job-2

Machine-2 is assigned to Job-4

Machine-3 is assigned to Job-3

Machine-4 is assigned to Job-1

Total cost of time = 5 + 5 + 3 + 2 = 15 hours

Assignment Problem

Problem 2

Problem 2:

	Region A	Region B	Region C	Region D	Region E
Sales preson-1	17	10	15	16	20
Sales preson-2	12	9	16	9	14
Sales preson-3	11	16	14	15	12
Sales preson-4	14	10	10	18	17
Sales preson-5	13	12	9	15	11

Assignment Problem

Problem 2

حدد العنصر الأصغر في كل صف

17	10	15	16	20	$\rightarrow p_1 = 10$
12	9	16	9	14	$\rightarrow p_2 = 9$
11	16	14	15	12	$\rightarrow p_3 = 11$
14	10	10	18	17	$\rightarrow p_4 = 10$
13	12	9	15	11	$\rightarrow p_5 = 9$

Assignment Problem

Problem 2

كون المصفوفة الناتجة من طرح كل عنصر في المصفوفة من العنصر الأصغر في كل صف

7	0	5	6	10
3	0	7	0	5
0	5	3	4	1
4	0	0	8	7
4	3	0	6	2

Assignment Problem

Problem 2

حدد العنصر الأصغر في كل عمود

7	0	5	6	10
3	0	7	0	5
0	5	3	4	1
4	0	0	8	7
4	3	0	6	2
↓	↓	↓	↓	↓
q_1	q_2	q_3	q_4	q_1
0	0	0	0	1

Assignment Problem

Problem 2

كون المصفوفة الناتجة من طرح كل عنصر في المصفوفة من العنصر الأصغر في كل عمود

7	0	5	6	9
3	0	7	0	4
0	5	3	4	0
4	0	0	8	6
4	3	0	6	1

Assignment Problem

Problem 2

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

7	0	5	6	9
3	0	7	0	4
0	5	3	4	0
4	0	0	8	6
4	3	0	6	1

Assignment Problem

Problem 2

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

7	0	5	6	9
3	0	7	0	4
0	5	3	4	0
4	0	0	8	6
4	3	0	6	1

Assignment Problem

Problem 2

تغطيه الخلايا الصفريه بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

7	0	5	6	9
3	0	7	0	4
0	5	3	4	0
4	0	0	8	6
4	3	0	6	1

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف او الأعمدة

Assignment Problem

Problem 2

تغطيه الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

7	0	5	6	9
3	0	7	0	4
0	5	3	4	0
4	0	0	8	6
4	3	0	6	1

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف او الأعمدة

Assignment Problem

Problem 2

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف او الأعمدة

7	0	5	6	9
3	0	7	0	4
0	5	3	4	0
4	0	0	8	6
4	3	0	6	①

اطرح العنصر الأصغر من العناصر الغير مغطاه

اضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاه بخطين (نقاط التقاطع)

Assignment Problem

Problem 2

7-1	0	5	6-1	9-1
3	0+1	7+1	0	4
0	5+1	3+1	4	0
4-1	0	0	8-1	6-1
4-1	3	0	6-1	1-1

اطرح العنصر الأصغر من العناصر الغير مغطاه

اضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاه بخطين (نقاط التقاطع)

Assignment Problem

Problem 2

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

Assignment Problem

Problem 2

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

Assignment Problem

Problem 2

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

Assignment Problem

Problem 2

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

Assignment Problem

Problem 2

تغطيه الخلايا الصفريه بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

Assignment Problem

Problem 2

تغطيه الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

عدد الخطوط = من عدد الصفوف او الأعمدة

الحل الأمثل

Assignment Problem

Problem 2

تغطيه الخلايا الصفريه بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

عدد الخطوط = من عدد الصفوف او الأعمدة

الحل الأمثل

Assignment Problem

Problem 2

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

$$x_{12}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

3		8	0	4
0		4	4	0
3		0	7	5
3		0	5	0

$$x_{12}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

3		8	0	4
0		4	4	0
3		0	7	5
3		0	5	0

$$x_{12}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

0		4	0
3		0	5
3		0	0

$$x_{12}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

0		4	0
3		0	5
3		0	0

$$x_{12}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1 \quad x_{43}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

0				0
3				0

$$x_{12}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1 \quad x_{43}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

0				0
3				0

$$x_{12}^* = 1$$

$$x_{24}^* = 1$$

$$x_{43}^* = 1$$

$$x_{55}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

0				

$$x_{12}^* = 1$$

$$x_{24}^* = 1$$

$$x_{43}^* = 1$$

$$x_{55}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

0				

$$x_{12}^* = 1$$

$$x_{24}^* = 1$$

$$x_{43}^* = 1$$

$$x_{55}^* = 1$$

$$x_{31}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

$$x_{12}^* = 1$$

$$x_{24}^* = 1$$

$$x_{43}^* = 1$$

$$x_{55}^* = 1$$

$$x_{31}^* = 1$$

Assignment Problem

Problem 2

	Region A	Region B	Region C	Region D	Region E
Sales preson-1	17	10	15	16	20
Sales preson-2	12	9	16	9	14
Sales preson-3	11	16	14	15	12
Sales preson-4	14	10	10	18	17
Sales preson-5	13	12	9	15	11

6	0	5	5	8
3	1	8	0	4
0	6	4	4	0
3	0	0	7	5
3	3	0	5	0

Sales Person 1 is assigned to Region B

Sales Person 2 is assigned to Region D

Sales Person 3 is assigned to Region A

Sales Person 4 is assigned to Region C

Sales Person 5 is assigned to Region E

$$x_{12}^* = 1 \quad x_{24}^* = 1 \quad x_{31}^* = 1 \quad x_{55}^* = 1 \quad x_{43}^* = 1$$

Total cost of time = 10 + 9 + 11 + 10 + 11 = 51 Days



Thank You